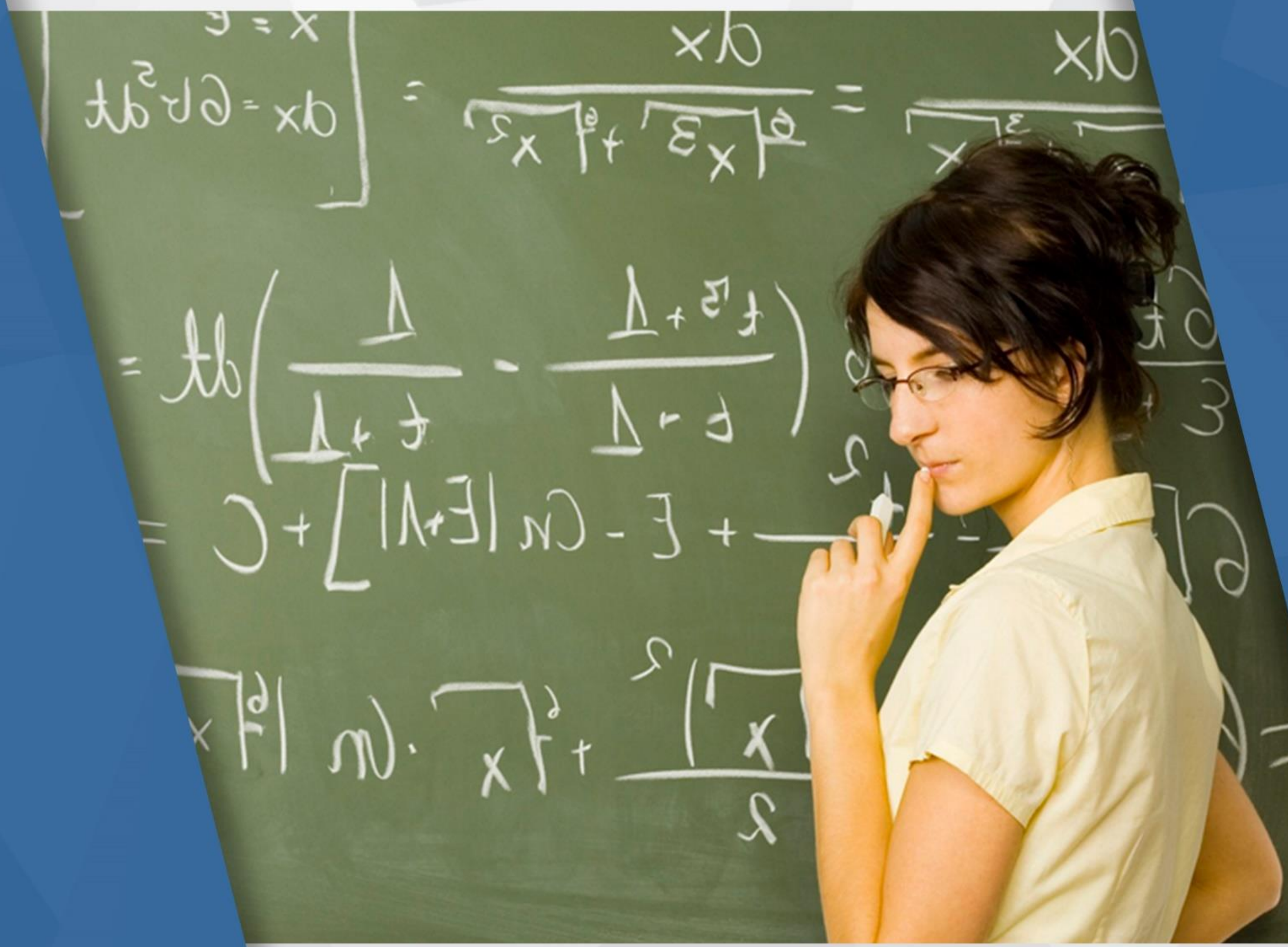
UNIESP S.A.



Curso de Nivelamento
Matemática Básica

Diretoria Acadêmica

Diretoria de Pesquisa, Extensão e Assuntos Comunitários

Curso de Nivelamento

Matemática Básica

São Paulo

2017

PRESIDENTE DA UNIESP S/A:

José Fernando Pinto da Costa

DIRETOR ACADÊMICO:

Éricson Dias Mello

DIRETORA DE PESQUISA, EXTENSÃO E ASSUNTOS COMUNITÁRIOS:

Rosa Maria Mijas Beloto

COORDENAÇÃO DE CURSOS DE EXTENSÃO EM EAD

Ailton de Souza

DIRETORA DE GRADUAÇÃO

Rosângela Calixto

DIRETORIA DE CONTROLE E REGISTRO ACADÊMICO

Alexandre Magno dos Santos

BIBLIOTECÁRIO

Edílson Teles Gomes Jr

Agradecimento especial à **PRÓ-REITORA** e à **DIRETORA de Educação a Distância**, Professoras **Carina Alves e Juliana Alves**, e à Coordenadora de Tecnologia Educacional, **Lusana Caroline Costa de Araújo Veríssimo**, da **UNIVERSIDADE BRASIL**, por terem disponibilizado o conteúdo deste Curso.

DIRETORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Matemática

São Paulo

2017

DIRETORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Matemática

Ficha catalográfica realizada pela bibliotecária Dalila Tessitore – CRB

DIRETORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Matemática

APRESENTAÇÃO DA DISCIPLINA

Caro (a) Aluno (a),

Seja bem-vindo (a) aos estudos de mais uma disciplina fundamental em seu curso. Diariamente utilizamos a Matemática das formas mais variadas: na conferência de rendimentos; no cálculo de despesas a pagar; na avaliação do melhor investimento; na apuração de juros em empréstimos; no cálculo de distâncias; no dimensionamento de estoques, enfim, a matemática é aplicada numa infinidade de atividades cotidianas. A história da matemática acompanha a história da civilização humana e a crescente necessidade de resolver os problemas de ordem prática surgidos na vida em comunidade. Nos tempos primitivos, a contagem de animais deu origem aos números naturais. Com o desenvolvimento do comércio entre os seres humanos, a necessidade de calcular créditos e débitos, deu origem aos números inteiros. Já a divisão de terras pode ter originado os números fracionários. O Movimento da Matemática Moderna, foi um movimento que teve grande força após a Segunda Guerra Mundial, e se baseava na formalidade e no rigor dos fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra para o ensino e a aprendizagem de Matemática A partir da década de 1960 houve maior preocupação nas áreas relacionadas com o ensino da Matemática, de forma a tratar de temas que moldam a área atual, realizou-se unificações de disciplinas e foi elencado temas pelos quais seriam debatidos e a partir de então ocorrem discussões frequentes para que o tema seja debatido e postos a análise.

Nesta disciplina aprofundaremos os conceitos e princípios aplicados nos diferentes campos da Matemática, compreendemos melhor os gêneros que ela envolve, quais são os seus elementos estruturais e suas relações. Aproveite todas as orientações de estudos apresentadas neste material, faça as leituras e pesquisas indicadas e não deixe de esclarecer as suas dúvidas.

Bons estudos!

SUMÁRIO

UNIDADE 1: CONJUNTOS, POTENCIAÇÃO, RADICIAÇÃO, FATORAÇÃO ALGÉBRICA, MÚLTIPLOS E DIVISORES, FUNÇÃO, FUNÇÃO 2º GRAU

CONTEÚDOS

1. CONJUNTOS

Adotaremos três conceitos primitivos: *elemento, conjunto e pertinência*. Podemos dizer que conjunto é uma "reunião" de elementos e que, quando um elemento faz parte de um conjunto, ele pertence a esse conjunto.

<u>Notação e representação:</u>

A notação de um conjunto é feita com uma letra maiúscula do nosso alfabeto e a representação pode ser feita de três maneiras.

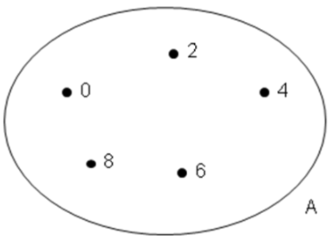
A.) Listagem: Os elementos do conjunto separados por vírgulas e envolvidos por um par de chaves.

A = {0, 2, 4, 6, 8}

B.) Propriedade dos elementos: Apresentação dos elementos pelo uso de uma propriedade que sirva a todos os elementos do conjunto e somente a eles.

A = {x / x seja um algarismo par}

C.) Diagrama de Euller-Venn: Representação gráfica do conjunto.



<u>Relação de pertinência:</u>

Um elemento "pertence" a um conjunto quando ele faz parte desse conjunto. Sendo A = {0, 2, 4, 6, 8} tem-se que 2 pertence ao conjunto A. Simbolicamente: $2 \in A$. Tem-se, também, que 3 não pertence ao conjunto A. Simbolicamente $3 \notin A$.

<u>Relação de inclusão:</u>

Quando todos os elementos de um conjunto pertencem a outro conjunto, dizemos que o primeiro conjunto está "contido" no segundo conjunto. Sendo A = {0, 2, 4, 6, 8} e B = {0, 2, 8} tem-se

B está contido em A. Simbolicamente $B \subset A$. Quando um conjunto está contido em outro, ele é dito subconjunto desse outro.

Operações com conjuntos:

A.) União: $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$

$$A = \{0, 1, 2, 3\} \text{ e } B = \{2, 3, 4, 5\} \Rightarrow A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

B.) Intersecção: $A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \in B\}$

$$A = \{0, 1, 2, 3\} \text{ e } B = \{2, 3, 4, 5\} \Rightarrow A \cap B = \{2, 3\}$$

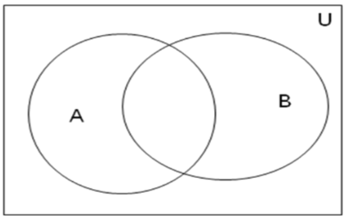
C.) Diferença: $A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \notin B\}$

$$A = \{0, 1, 2, 3\} \text{ e } B = \{2, 3, 4, 5\} \Rightarrow A - B = \{0, 1\}$$

Conjunto vazio:

O conjunto vazio é formado por nenhum elemento. Pode ser representado por $\{\ \}$ ou $\varnothing$.

Número elementos da união de conjuntos:



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Conjuntos numéricos:

A.) Números naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

B.) Números inteiros: $\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

$$\mathbb{Z}^* = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

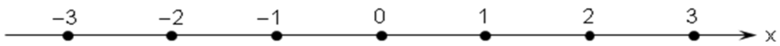
$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\} = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$$

C.) Números racionais: $\mathbb{Q} = \left\{ x \,/\, x = \frac{p}{q} \text{ com } p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$, ou seja, todo número que puder ser apresentado na forma de fração, com numerador inteiro e denominador inteiro e não nulo. Números que não estejam nessas condições são ditos *números irracionais*. Exemplos: π, $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{3}$.

D.) Números reais: $\mathbb{R} = \{x \,/\, x \text{ é racional ou x é irracional}\}$

Eixo real:



E.) Intervalos reais:

	$a < x < b$	$]a, b[$
	$a \leq x \leq b$	$[a, b]$
	$a \leq x < b$	$[a, b[$
	$x \geq a$	$[a, +\infty[$
	$x < b$	$]-\infty, b[$

2. POTENCIAÇÃO

Definição:

$a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n > 1 \rightarrow a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n vezes}}$.

$a \in \mathbb{R}$ e $n = 1 \rightarrow a^1 = a.$

$a \in \mathbb{R}^* \rightarrow a^0 = 1.$

$a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N}$, $n > 1 \rightarrow a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Observação:

A potência 0^0 é um símbolo de indeterminação.

Propriedades:

Garantidas as condições de existência das potências, tem-se:

$a^m \cdot a^n = a^{n+m}$.

$a^m \div a^n = a^{n-m}$.

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

3. RADICIAÇÃO

Definição:

$a \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{N}^*$, $\rightarrow$ $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.

$a \in \mathbb{R}_-^*$ (número negativo) e n é um número ímpar $\rightarrow$ $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.

Importante:

Não existe, no campo real, raiz de índice par com radicando negativo.

Propriedades:

Garantidas as condições de existência das raízes, tem-se:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$.

$\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Observações:

Para n natural, tem-se que $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

Para $m \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

4. FATORAÇÃO ALGÉBRICA

Fator comum:

$$ax + ay = a(x + y).$$

Quadrado da soma ou diferença (trinômio quadrado perfeito):

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Diferença de quadrados (produto da soma pela diferença):

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Outros casos de fatoração:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3.$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3.$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

5. MÚLTIPLOS E DIVISORES

O número inteiro n é múltiplo do número inteiro m se existir um número inteiro k tal que $n = m \cdot k$. Se n é múltiplo de m, então m é dito divisor ou fator de n.

Assim podemos afirmar que o número inteiro 15 é múltiplo de 3, pois existe um número inteiro k, no caso o número 5, tal que $15 = 3 \cdot k$. Por outro lado 3 é um divisor ou fator de 15.

Número par:

Um número inteiro é par quando ele pertence ao conjunto dos múltiplos de 2. Número par é da forma 2k, sendo k um número inteiro.

Número ímpar:

Um número inteiro é ímpar quando ele ***não*** pertence ao conjunto dos múltiplos de 2. Número ímpar é da forma $2k + 1$, sendo k um número inteiro.

Número primo:

Um número inteiro é primo quando ele admite exatamente 4 divisores inteiros. Se p é um número primo seus únicos divisores inteiros são -1, 1, $-$ p e p.

Número composto:

Um número inteiro é composto quando ele admite mais de 4 divisores inteiros. Todo número composto pode ser decomposto (fatorado) num produto de números primos.

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow 24 = 2^3 \cdot 3.$$

MDC e MMC – conceito:

Dados dois ou mais número inteiros, chamamos de mdc desses números, o maior divisor comum a todos eles e de mmc, o menor múltiplo comum a todos os números apresentados.

MDC e MMC – determinação:

Na determinação do mdc e do mmc de dois ou mais números, o primeiro passo é a fatoração de todos os números transformando-os num produto de fatores primos. Tem-se então:

MDC: Produto de todos os fatores comuns às decomposições com os menores expoentes com os quais eles se apresentam.

MMC: Produto de todos os fatores, comuns ou não, com os maiores expoentes com os quais eles se apresentam.

MDC e MMC – exemplo:

Determine o mdc e o mmc dos números 24 e 36.

Resolução: Tem-se: $24 = 2^3 \cdot 3$ e $36 = 2^2 \cdot 3^2$.

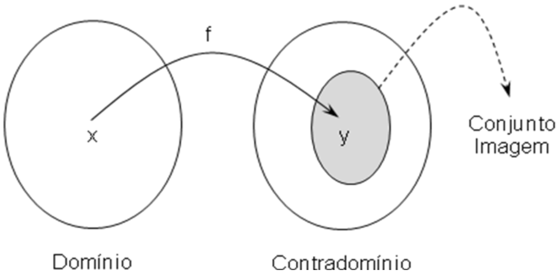
Assim: $\text{mdc}(24, 36) = 2^2 \cdot 3 \Rightarrow \text{mdc}(24, 36) = 12.$

$\text{mmc}(24, 36) = 2^3 \cdot 3^2 \Rightarrow \text{mmc}(24, 36) = 72$

6. FUNÇÃO

Função é uma relação binária de A em B tal que todo elemento do conjunto A admite, para si, um correspondente único no conjunto B que é a sua imagem.

O conjunto A é dito domínio da função – todo elemento do domínio possui imagem e essa imagem, para ele, é única – e o conjunto B é dito contradomínio da função – nem todo elemento do contradomínio é necessariamente imagem de algum elemento do domínio. Os elementos do contradomínio que forem imagens determinam o conjunto imagem.



Exemplos do cotidiano:
1.) Determina-se o quanto se paga de energia elétrica em ***função*** do consumo;
2.) Num restaurante “por quilo” paga-se em ***função*** do “peso” da comida.
3.) Determina-se a diagonal de um quadrado em ***função*** do lado desse quadrado.

Em resumo, tem-se uma função toda vez que na determinação de uma grandeza, ela depende do valor de outra grandeza, ou seja, é a primeira é obtida em ***função*** da segunda.

Função real

A função real é definida de R em R. Apresentamos uma função fornecendo dois conjuntos: o domínio e o contradomínio e a sentença matemática que “conduz” o elemento até a sua imagem. Quando esses conjuntos forem omitidos, subentende-se que a função é definida de R em R e, aí, ela é dita função real.

Definição:

Domínio da função real é o mais amplo subconjunto de R para o qual são possíveis todas as operações indicadas na sentença.

Determinação do domínio:

A.) $f(x) = \dfrac{n}{E(x)} \Rightarrow D = \{x \in R / E(x) \neq 0\}$

B.) $f(x) = \sqrt[2n]{E(x)},\ n \in N^* \Rightarrow D\{x \in R / E(x) \geq 0\}$

Apresentação:

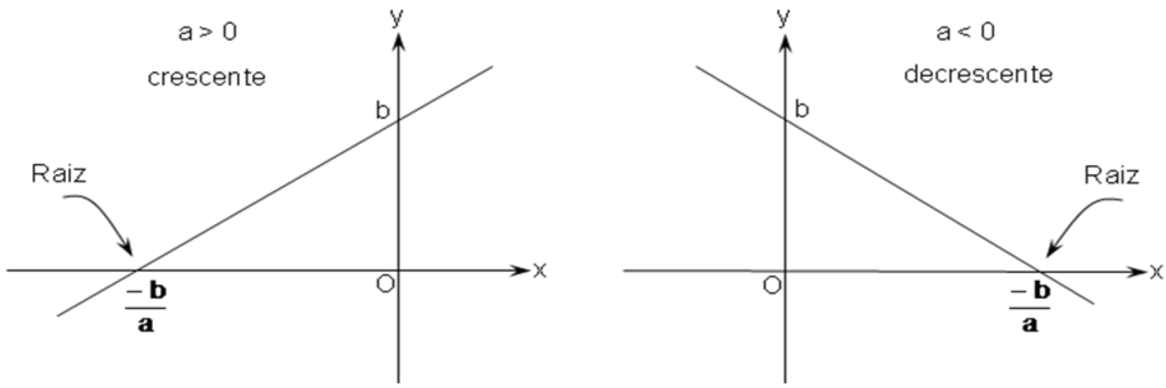
A.) Sentença: $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$.

B.) Domínio e contradomínio: $D = R$ e $CD = R$.

C.) Conjunto imagem: $Im = R$.

D.) Raiz: $x = \dfrac{-b}{a}$.

Gráfico: reta.



7. FUNÇÃO DO 2º GRAU

Apresentação:

A.) Sentença: $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

B.) Domínio e contradomínio: $D = ¡$ e $CD = ¡$.

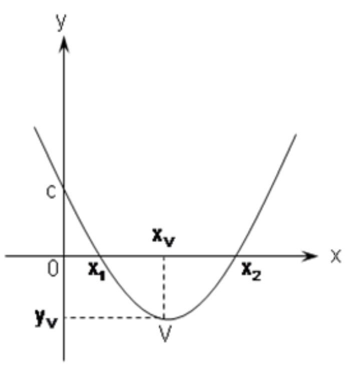
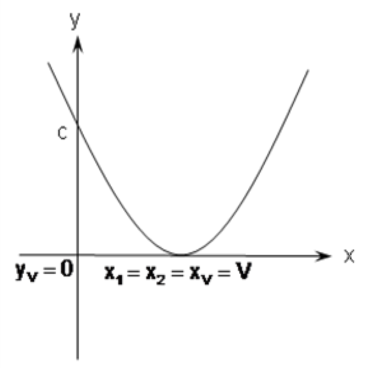
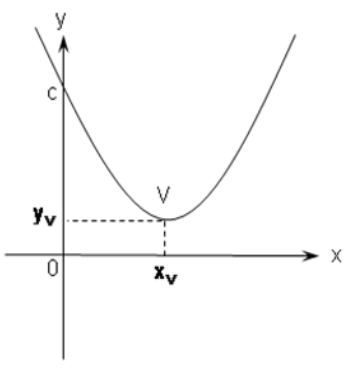
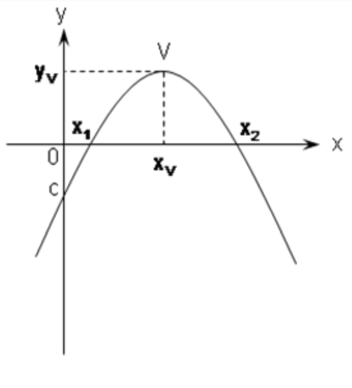
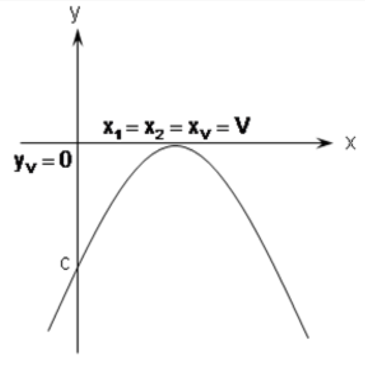
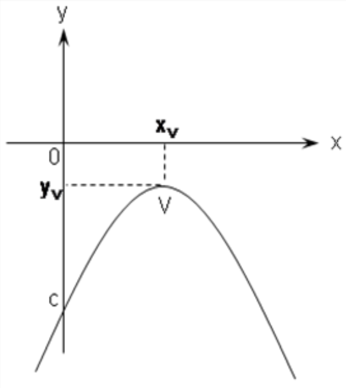
C.) Raízes: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$.

D.) Vértice: $V(x_v; y_v)$ com $x_v = \dfrac{-b}{2a}$ e $y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}$.

E.) Conjunto imagem: $a > 0 \rightarrow Im = \{y \in R / y \geq y_v\}$ e $a < 0 \rightarrow Im = \{y \in R / y \leq y_v\}$.

F.) Pontos extremos: $a > 0 \rightarrow y_V$: valor mínimo da função; $a < 0 \rightarrow y_V$: valor máximo da função.

Gráfico: parábola.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

UNIDADE 2: DESIGUALDADES, EXPONENCIAIS, LOGARÍTMOS, TRIGONOMETRIA, PROGRESSÃO GEOMÉTRICA, DETERMINANTE

CONTEÚDOS

1. DESIGUALDADES

<u>Propriedades das desigualdades:</u>

A.) P_1: $a > b \text{ e } b > c \Rightarrow a > c$

B.) P_2: $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

Consequência: $a + b > c \Rightarrow a + b - b > c - b \therefore a > c - b$

C.) P_3: $a > b \text{ e } c \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a \cdot c > b \cdot c \text{ se } c > 0 \\ a \cdot c < b \cdot c \text{ se } c < 0 \end{cases}$

<u>Inequação do 1º grau – apresentação:</u>

$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ ax + b \geq 0 \\ ax + b < 0 \\ ax + b \leq 0 \end{cases} \quad \text{com} \quad a \neq 0 .$$

A resolução de uma inequação do 1º grau é feita com o mesmo procedimento matemático de resolução da equação do 1º grau, respeitando-se as propriedades das desigualdades.

<u>Inequação do 1º grau – exemplo:</u>

Resolver, em ¡ , a inequação: $-4x + 12 \leq 0$.

Resolução:

$-4x + 12 \leq 0 \Rightarrow -4x \leq -12 \Rightarrow 4x \geq 12 \Rightarrow x \geq 3$

$S = \{x \in$ ¡ $/ x \geq 3\}$

<u>Inequação do 2º grau – apresentação:</u>

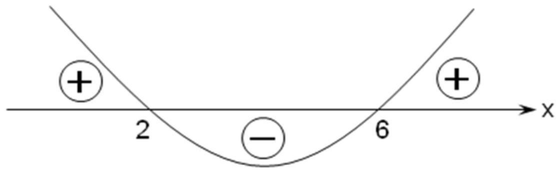
$$\begin{cases} ax^2 + bx + c > 0 \\ ax^2 + bx + c \geq 0 \\ ax^2 + bx + c < 0 \\ ax^2 + bx + c \leq 0 \end{cases} \quad \text{com} \quad a \neq 0 .$$

A resolução da inequação do 2º é feita com o auxílio da função do 2º grau. Associamos a expressão do 2º grau à função do 2º grau, estudamos a sua variação de sinais e, posteriormente, selecionamos os valores da variável que tornam a sentença verdadeira. Esses valores determinam o conjunto solução da inequação.

<u>Inequação do 2º grau – exemplo:</u>

Resolver, em ¡ , a inequação: $x^2 - 8x + 12 \leq 0$

Resolução:



$S = \{x \in$ ¡ $/ 2 \leq x \leq 6\}$

2. EXPONENCIAIS

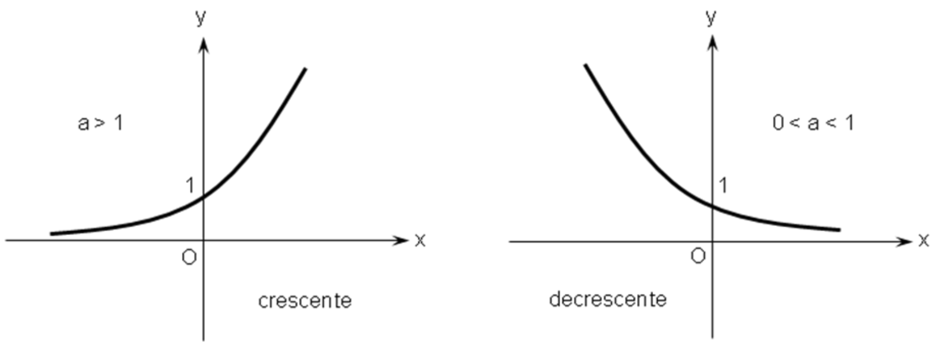
<u>Apresentação:</u>

A.) Sentença: $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

B.) Domínio e contradomínio: $D = R$ e $CD = R$.

C.) Conjunto imagem: $Im = R_+^*$.

<u>Gráfico:</u>



<u>Equação exponencial:</u>

Sendo <u>a</u> e <u>b</u> bases positivas, distintas e diferentes de 1, tem-se:

$$\begin{cases} a^{E_1(x)} = a^{E_2(x)} \Rightarrow E_1(x) = E_2(x) \\ a^{E_1(x)} = b^{E_2(x)} \Rightarrow \text{Logaritmo} \end{cases}$$

Inequação exponencial:

$$a > 1 \begin{cases} a^{E_1(x)} > a^{E_2(x)} \Rightarrow E_1(x) > E_2(x) \\ a^{E_1(x)} < a^{E_2(x)} \Rightarrow E_1(x) < E_2(x) \end{cases} \qquad 0 < a < 1 \begin{cases} a^{E_1(x)} > a^{E_2(x)} \Rightarrow E_1(x) < E_2(x) \\ a^{E_1(x)} < a^{E_2(x)} \Rightarrow E_1(x) > E_2(x) \end{cases}$$

Para $a \in R$, $a > 0$ e $a \neq 1$

3. LOGARÍTMOS

Definição e nomenclatura:

$$\text{Log}_a N = \alpha \Rightarrow a^{\alpha} = N \quad \begin{cases} N - \text{logaritmando} \\ a - \text{base} \\ \alpha - \text{logaritmo} \end{cases}$$

Decorrência da definição:

$$\text{Log}_a 1 = 0 \qquad \text{Log}_a a = 1$$

$$\text{Log}_a a^n = n \qquad a^{\text{Log}_a N} = N$$

Condições de existência:

$$\text{Log}_a N = \alpha \Rightarrow a^{\alpha} = N \quad \begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

Propriedades:

Garantidas as condições de existência dos logaritmos, tem-se:

P_1: $\text{Log}_a(N \cdot M) = \text{Log}_a N + \text{Log}_a M$

P_2: $\text{Log}_a\left(\dfrac{N}{M}\right) = \text{Log}_a N - \text{Log}_a M$

P_3: $\text{Log}_a B^n = n \cdot \text{Log}_a B$

P_4: $\text{Log}_a \sqrt[n]{B} = \dfrac{1}{n} \cdot \text{Log}_a B$

P_5: $\text{Log}_{a^n} B = \dfrac{1}{n} \cdot \text{Log}_a B$

Mudança de base:

Garantidas as condições de existência dos logaritmos, tem-se:

$$\text{Log}_a N = \frac{\text{Log}_c N}{\text{Log}_c a}$$

Consequências da mudança de base:

Garantidas as condições de existência dos logaritmos, tem-se:

$$\begin{cases} \text{Log}_a N = \dfrac{1}{\text{Log}_N a} \\ \text{Log}_c a \cdot \text{Log}_a N = \text{Log}_c N \end{cases}$$

Equação logarítmica

Garantidas as condições de existência dos logaritmos, tem-se:

$$\begin{cases} \text{Log}_a E(x) = \alpha \Rightarrow E(x) = a^{\alpha} \\ \text{Log}_a E_1(x) = \text{Log}_a E_2(x) \Rightarrow E_1(x) = E_2(x) \end{cases}$$

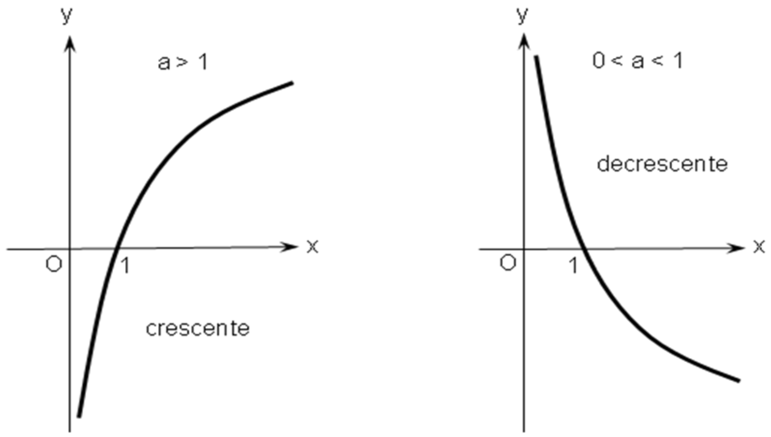
Função logarítmica

A.) Sentença: $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

B.) Domínio e contradomínio: $D = R_+^*$ e $CD = R$.

C.) Conjunto imagem: $Im = R$.

Gráfico:



Inequação logarítmica

Garantidas as condições de existência dos logaritmos, tem-se:

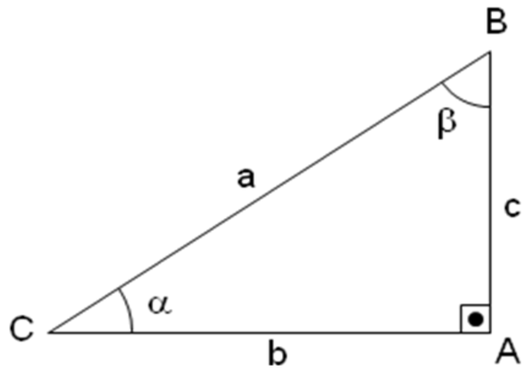
$$a > 1 \quad \begin{cases} \text{Log}_a E_1(x) > \text{Log}_a E_2(x) \Rightarrow E_1(x) > E_2(x) \\ \text{Log}_a E_1(x) < \text{Log}_a E_2(x) \Rightarrow E_1(x) < E_2(x) \end{cases}$$

$$0 < a < 1 \quad \begin{cases} \text{Log}_a E_1(x) > \text{Log}_a E_2(x) \Rightarrow E_1(x) < E_2(x) \\ \text{Log}_a E_1(x) < \text{Log}_a E_2(x) \Rightarrow E_1(x) > E_2(x) \end{cases}$$

Para $a \in R$, $a > 0$ e $a \neq 1$

4. TRIGONOMETRIA

Trigonometria no triângulo retângulo:



$\text{sen } \alpha = \dfrac{c}{a}$ $\qquad$ $\cos \alpha = \dfrac{b}{a}$ $\qquad$ $\text{tg } \alpha = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

$\text{sen } \beta = \dfrac{b}{a}$ $\qquad$ $\cos \beta = \dfrac{c}{a}$ $\qquad$ $\text{tg } \beta = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}$

$\alpha + \beta = 90^\circ$ (ângulos complementares) $\Rightarrow$ $\text{sen } \alpha = \cos \beta$, $\cos \alpha = \text{sen } \beta$ e $\text{tg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\beta}$

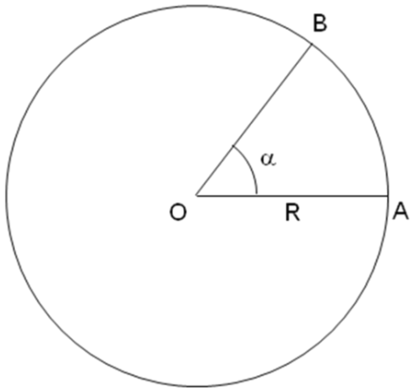
Relação Fundamental:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Ângulos notáveis:

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Arco de circunferência:



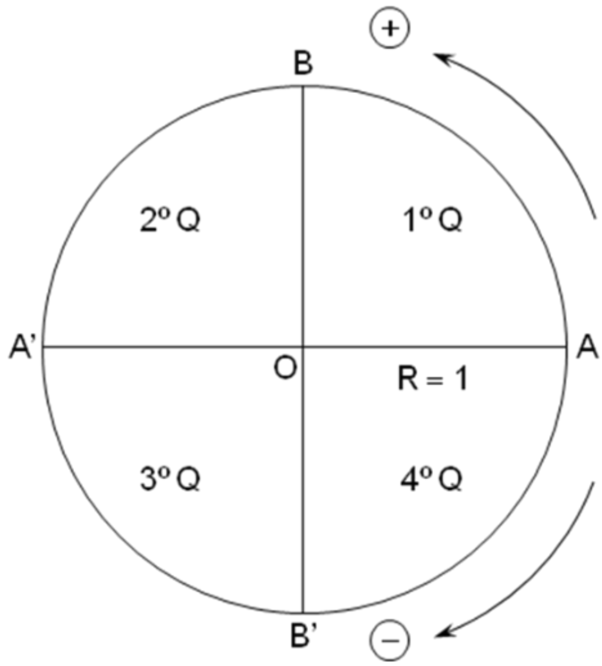
1 radiano (1 rad): Ângulo central correspondente a um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência.

$$\text{med (AB)} = \frac{\text{comp(AB)}}{R} \text{ (rad)}$$

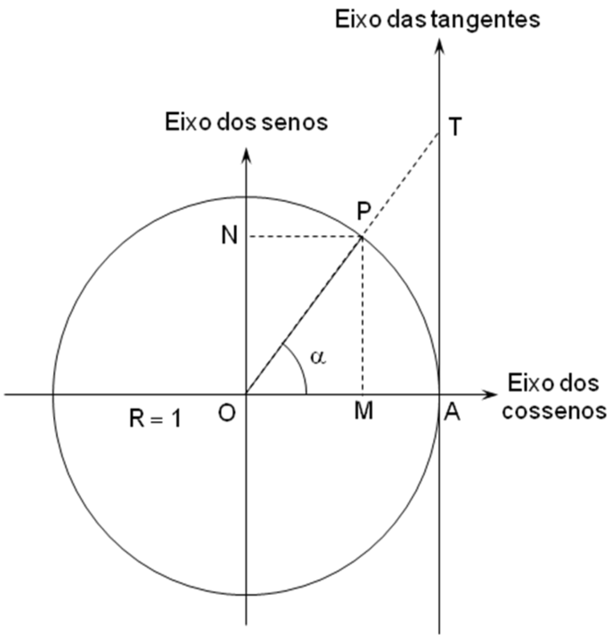
1 grau (1º): Ângulo central correspondente a um arco cujo comprimento é igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência.

Conversão de unidades: Um arco cuja medida em radianos é π rad corresponde, em graus, a 180º.

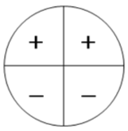
Circunferência trigonométrica:



Trigonometria na circunferência:

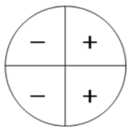


sen α = ON



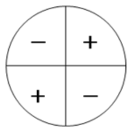
$-1 \leq \text{sen}\ \alpha \leq 1$

cos α = OM



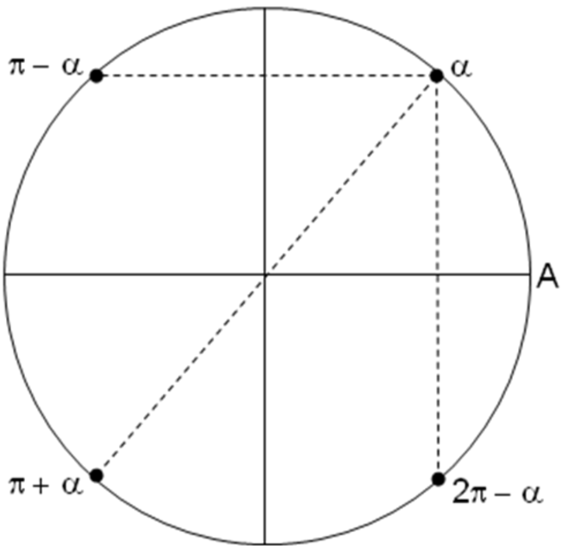
$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

tg = AT

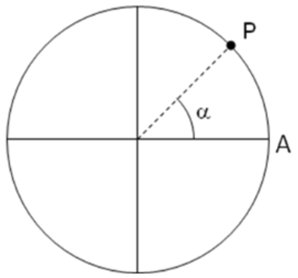


tg α ∈ ¡

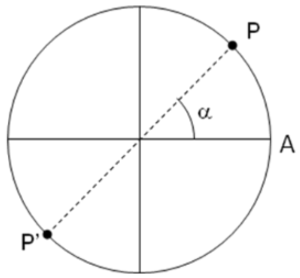
Redução ao primeiro quadrante:



Expressão geral dos arcos trigonométricos:



$\alpha + 2k\pi,\ k \in$ ¢



$\alpha + k\pi,\ k \in$ ¢

Equações trigonométricas;

$$\textbf{sen } \alpha = \textbf{sen } \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi,\ k \in \text{¢} \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi,\ k \in \text{¢} \end{cases}$$

$$\textbf{cos } \alpha = \textbf{cos } \beta \Rightarrow \alpha = \pm\beta + 2k\pi,\ k \in \text{¢}$$

$$\textbf{tg } \alpha = \textbf{tg } \beta \Rightarrow \alpha = \beta + k\pi,\ k \in \text{¢}$$

Adição e subtração de arcos:

$\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a.$

$\text{sen } (a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a.$

$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b.$

$\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b.$

$$\text{tg } (a + b) = \frac{\text{tg}a + \text{tg}b}{1 - \text{tg}a \cdot \text{tg}b}.$$

$$\text{tg } (a - b) = \frac{\text{tg}a - \text{tg}b}{1 + \text{tg}a \cdot \text{tg}b}.$$

Arco duplo:

$\text{sen } (2a) = 2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a.$

$\cos (2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a.$

$$\text{tg } (2a) = \frac{2 \cdot \text{tg}a}{1 - \text{tg}^2 a}.$$

Transformação em produto:

$$\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

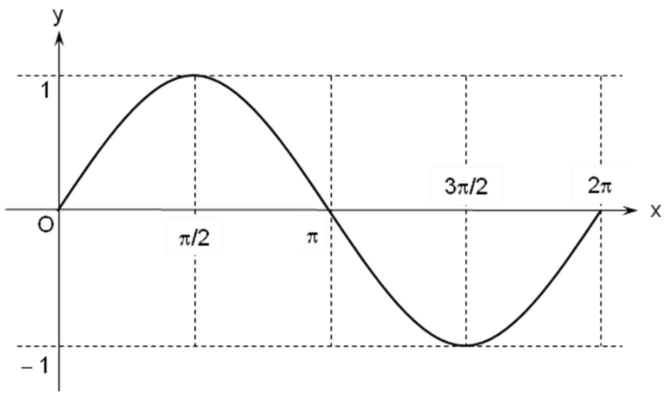
$$\text{sen } A - \text{sen } B = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A+B}{2}\right).$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cdot \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

$$\cos A - \cos B = -\,2 \cdot \text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

Função seno:

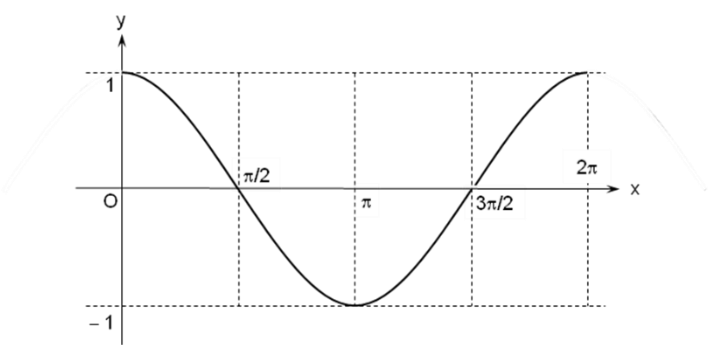
Sentença: $y = \text{sen } x$.



Domínio: ¡ **Conjunto Imagem: [– 1, 1]** **Período: 2π**

Função cosseno:

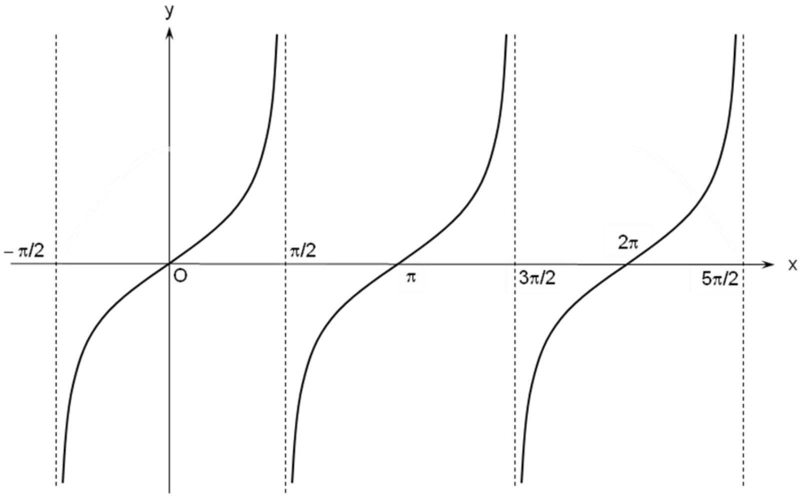
Sentença: $y = \cos x$.



Domínio: ¡ **Conjunto Imagem: [– 1, 1]** **Período: 2π**

Função tangente:

Sentença: $y = \text{tg } x$.



Domínio: $\left\{x \in ¡ \;/ x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\, k \in ¢\right\}$ **Conjunto Imagem:** ¡ **Período:** π

5. PROGRESSÃO ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA

Definição:

Progressão aritmética (PA) é uma sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo é o anterior ***somado*** a uma constante r, denominada razão da PA.

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Termo geral:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Propriedade:

Sejam a, b e c três termos consecutivos de uma PA. Assim:

$$b = \frac{a + c}{2}.$$

Soma dos n primeiros:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Definição:

Progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo é o anterior ***multiplicado*** por uma constante q, denominada razão da PG.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Termo geral:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Propriedade:

Sejam a, b e c três termos consecutivos de uma PG. Assim:

$$b^2 = a \cdot c\,.$$

Soma dos n primeiros:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Progressão geométrica convergente:

Uma progressão geométrica é convergente quando quantos mais termos se determina, mais o último termo calculado se aproxima de zero. Uma PG é convergente quando a razão a é de tal forma que $-1 < q < 1$, com $q \neq 0$.

Limite da soma dos infinitos termos da PG convergente:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

MATRIZ

Definição:

Matriz é uma tabela de números distribuídos de maneira organizada em linhas e colunas.

Apresentação:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathrm{L} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \mathrm{L} & a_{2n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ a_{m1} & a_{m2} & \mathrm{L} & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathrm{L} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \mathrm{L} & a_{2n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ a_{m1} & a_{m2} & \mathrm{L} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ordem da matriz:

A quantidade de linhas e de colunas de uma matriz constitui um par de números que chamamos de *ordem* da matriz. Assim, uma matriz de ordem 2 × 3 apresenta duas linhas e três colunas.

Matriz quadrada:

Uma matriz que apresenta o número de linhas igual ao número de colunas é dita matriz quadrada. Os elementos da matriz quadrada que apresentam o número da linha igual ao número da coluna compões a diagonal principal dessa matriz.

Operações com matrizes:

A.) Igualdade de matrizes: Duas matrizes são iguais quando, tendo a mesma ordem, têm os elementos correspondes iguais.

B.) Adição e subtração de matrizes: Para somarmos ou subtrairmos duas matrizes, necessariamente de mesma ordem, basta somarmos ou subtrairmos os elementos correspondentes.

C.) Multiplicação de uma matriz por uma constante.

– Existência do produto: Para que haja o produto da matriz A e B, nessa ordem, é necessário que o número de colunas da primeira matriz (A) seja igual ao número de colunas da segunda matriz (B). A ordem da matriz produto, resultante dessa multiplicação é dada pelo número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda.

$$A_{m \times p} \cdot B_{p \times n} = C_{m \times n}$$

Números iguais

Ordem da matriz produto

– A operação: Para determinação do elemento da linha i e coluna j da matriz produto utiliza-se a linha i da primeira matriz e da coluna j da segunda matriz. O primeiro elemento da linha deve ser multiplicado pelo primeiro elemento da coluna. Depois o segundo elemento da linha deve ser multiplicado pelo segundo elemento da coluna. Assim, sucessivamente, até o último elemento da linha ser multiplicado pelo último elemento da coluna. A soma desses produtos determinará o elemento da linha i e coluna j da matriz produto.

Importante:

Em geral, o produto AB é diferente do produto BA.

6. DETERMINANTE

Determinante é um número associado a uma matriz quadrada, calculado com auxílio da tabela que representa a matriz.

Apresentação:

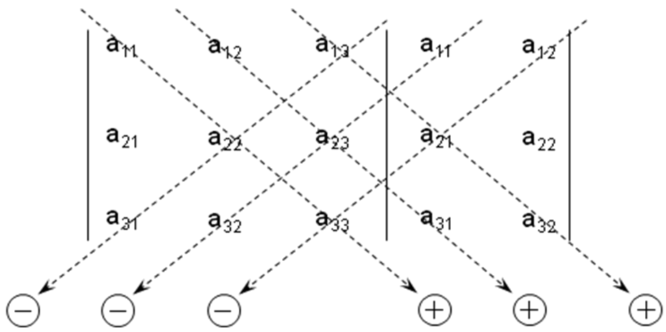
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathrm{L} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \mathrm{L} & a_{2n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ a_{n1} & a_{n2} & \mathrm{L} & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathrm{L} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \mathrm{L} & a_{2n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ a_{n1} & a_{n2} & \mathrm{L} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Cálculo de um determinante:</u>

A.) Matriz quadrada de ordem 1 $\rightarrow$ O determinante é o igual ao elemento que constitui a matriz.

B.) Matriz quadrada de ordem 2 $\rightarrow$ O determinante é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

C.) Matriz quadrada de ordem 3 $\rightarrow$ regra de Sarrus.



O determinante é dado pela soma das seis parcelas indicadas.

UNIDADE 3: SISTEMAS LINEARES, ANÁLISE COMBINATÓRIA, PROBABILIDADE, NÚMERO BINOMIAL, BINÔMIO DE NEWTON

CONTEÚDOS

1. SISTEMAS LINEARES

A.) Equação linear: equação na qual as incógnitas apresentam expoente igual a 1.

B.) Sistema linear: é um conjunto de m (m $\geq$ 1) equações lineares com n incógnitas.

C.) Solução de um sistema linear: é o conjunto ordenado que é solução de todas as equações desse sistema, simultaneamente.

Classificação:

$$\text{sistema linear} \begin{cases} \text{possível} \begin{cases} \text{determinado} \rightarrow \text{uma única solução} \\ \text{indeterminado} \rightarrow \text{infinitas soluções} \end{cases} \\ \text{impossível} \rightarrow \text{não admite solução} \end{cases}$$

Sistema normal:

Chama-se sistema normal aquele que admite n (n $\geq$ 1) equações e n incógnitas, cujo determinante D é diferente de zero. O determinante D é formado pelos coeficientes das incógnitas que devem ser colocadas na mesma ordem em todas as equações.

O sistema normal é sempre possível e determinado.

Regra de Cramer:

Com o uso da Regra de Cramer, uma incógnita α é determinada por $\alpha = \frac{D_\alpha}{D}$, sendo D_α o determinante D quando se substitui os coeficientes da incógnita α pelos termos independentes das equações. O uso da Regra de Cramer só possível na resolução do sistema chamado normal

Sistema linear escalonado:

Um sistema linear é dito escalonado quando, de uma equação para a outra, diminui o número de incógnitas.

Procedimento para o escalonamento de um sistema linear:

Um sistema linear não tem alteração no seu conjunto solução quando:

1º) Troca-se a ordem de suas equações;

2º) Multiplica-se ou dividi-se os coeficientes de uma de suas equações por uma constante não nula;

3º) Soma-se a uma de suas equações, outra equação, previamente multiplicada por uma constante.

Discussão quanto ao número de soluções de um sistema linear:

A.) 1º caso: número de equações = número de incógnitas:
$D \neq 0 \Rightarrow$ Sistema possível e determinado.
$D = 0 \rightarrow$ Escalonar o sistema e, então:
Número de equações < número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema possível e indeterminado.
Sentença falsa $\Rightarrow$ sistema impossível.

B.) 2º caso: número de equações $\neq$ número de incógnitas:
Escalonar o sistema e, então:
Número de equações = número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema possível e determinado
Número de equações < número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema possível e indeterminado.
Sentença falsa $\Rightarrow$ sistema impossível.

2. ANÁLISE COMBINATÓRIA

Fatorial:

Seja n um número natural. Tem-se:
$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$, para $n > 1$. Tem-se, também: $1! = 1$ e $0! = 1$.
Importante propriedade de fatorial: $n! = n\cdot(n-1)$, para $n \geq 1$.

Princípio fundamental – regra do produto:

Na contagem dos agrupamentos que apresentam n etapas ou n posições a serem ocupadas, deve-se avaliar o número de opções de cada etapa ou de cada posição e, o número de maneiras diferentes de constituir o agrupamento, será dado pelo produto do numero de opções de cada etapa ou de cada posição.

Permutação simples:

A quantidade de agrupamentos constituídos de n elementos distintos formados a partir de elementos distintos é dada por:

$$P_n = n!$$

Exemplo:
Determine a quantidade de anagramas (palavras formadas a partir das letras de uma palavra dada e que inclui essa palavra) formados a partir da palavra BITOCA?

Resolução:
São 6 letras distintas que podem trocar de posição. Assim:

$$P_6 = 6! = 720 \text{ anagramas}$$

<u>Permutação simples com elementos repetidos:</u>

A quantidade de agrupamentos constituídos de n elementos, dos quais α são repetidos de um tipo, β são repetidos de outro tipo, γ são repetidos de outro tipo e assim por diante até se completar os n elementos, é dada por:

$$P_n^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{n!}{\alpha!\cdot\beta!\cdot\gamma!}$$

Exemplo:

Determine a quantidade de anagramas (palavras formadas a partir das letras de uma palavra dada e que inclui essa palavra) formados a partir da palavra BATATA?

Resolução:

São 6 letras das quais a letra A se repete 3 vezes e a letra T ser repete duas vezes e que podem trocar de posição. Assim:

$$P_6^{(2,3)} = \frac{6!}{2!\cdot 3!} = 60 \text{ anagramas.}$$

<u>Arranjo simples:</u>

Chamamos de arranjo simples de n elementos distintos tomados k a k aos conjuntos formados de k elementos distintos escolhidos entre os n elementos disponíveis, sendo que a troca na ordem dos elementos do agrupamento gera outro agrupamento.

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemplo:

Determine a quantidade números constituídos de 3 algarismos distintos formados a partir dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

Resolução:

São 5 algarismos distintos dos quais 3 deles serão utilizados uma única vez cada um deles. Assim:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60 \text{ números.}$$

<u>Combinação simples:</u>

Chamamos de combinação simples de n elementos distintos tomados k a k aos conjuntos formados de k elementos distintos escolhidos entre os n elementos disponíveis, sendo que a troca na ordem dos elementos do agrupamento ***não*** gera outro agrupamento.

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Exemplo:

Determine a quantidade subconjuntos constituídos de 3 elementos distintos formados a partir dos elementos 1, 2, 3, 4 e 5?

Resolução:

São 5 elementos distintos dos quais 3 deles serão utilizados uma única vez cada um deles. Assim:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = 10 \text{ subconjuntos.}$$

3. PROBABILIDADE

Fenômeno aleatório:

Fenômeno que ocorre na natureza sem resultado previsível.

Espaço amostral (U):

Conjunto dos possíveis resultados de um fenômeno aleatório.

Evento (A):

Subconjunto do espaço amostral. Corresponde ao conjunto dos resultados favoráveis do fenômeno aleatório

Definição de probabilidade:

Na ocorrência de um fenômeno aleatório, de espaço amostral U, a probabilidade de ocorrer o evento A, representada por P(A), é a razão entre o número de elementos do evento e o número de elementos do espaço amostral.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

União de eventos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Eventos independentes:

Dois eventos são ditos independentes quando a ocorrência de um deles não interfere na ocorrência do outro. Para dois eventos independentes tem-se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Observações:

1ª) $0 \le P(A) \le 1$.
2ª) $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, sendo $\bar{A}$ o evento complementar de A.

4. NÚMERO BINOMIAL

Sendo n e k dois números naturais, com $n \ge k$, chama-se número binomial ao número $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ (**n** é o numerador e **k** é o denominador).

Casos particulares:

$$\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{1} = n \ \text{e}\ \binom{n}{n} = 1$$

Igualdade de números binomiais:

$$\binom{n}{a} = \binom{n}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ \text{ou} \\ a + b = n \end{cases}$$

Relação de Stiffel:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

5. TRIÂNGULO DE PASCAL

Apresentação:

$$\begin{array}{llllll}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \ldots & \binom{n}{n}
\end{array}$$

Calculando-se cada número binomial, tem-se:

1					
1	2				
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1
...	...	...	...	...	

Propriedade:

A soma dos elementos da linha n, do Triângulo de Pascal, é igual a 2^n.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

6. BINÔMIO DE NEWTON

Apresentação:

$$(x+a)^n=\binom{n}{0}x^{n-0}a^0+\binom{n}{1}x^{n-1}a^1+\binom{n}{2}x^{n-2}a^2+\binom{n}{3}x^{n-3}a^3+\cdots+\binom{n}{n-1}x^1a^{n-1}+\binom{n}{n}x^0a^n$$

Os coeficientes numéricos do desenvolvimento do binômio $(x + a)^n$ são os elementos da linha n do Triângulo de Pascal.

Termo geral:

Sendo T_{k+1} o termo de ordem k + 1 do binômio $(x + a)^n$, tem-se:

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}x^{n-k}a^k$$

Exemplo 1: Desenvolver o binômio $(2x + 1)^4$.

Resolução:

$$(2x+1)^n=\binom{4}{0}(2x)^4 1^0+\binom{4}{1}(2x)^3 1^1+\binom{4}{2}(2x)^2 1^2+\binom{4}{3}(2x)^1 1^3+\binom{4}{4}(2x)^0 1^4$$

$$(2x+1)^n=1\cdot 16x^4\cdot 1+4\cdot 8x^3\cdot 1+6\cdot 4x^2\cdot 1+4\cdot 2x\cdot 1+1\cdot 1\cdot 1$$

$$(2x+1)^n=16x^4+32x^3+24x^2+8x+1$$

Exemplo 2: Determine o termo independente de x no desenvolvimento $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$.

Resolução:

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6 \Rightarrow T_{k+1}=\binom{6}{k}(x^2)^{6-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{k+1}=\binom{6}{k}\cdot x^{12-2k}\cdot x^{-k} \Rightarrow T_{k+1}=\binom{6}{k}\cdot x^{12-3k}$$

$$12-3k=0 \Rightarrow k=4$$

$$T_5=\binom{6}{5} \Rightarrow T_5=\frac{6!}{5!\cdot 1!} \therefore T_5=6.$$

O termo independente de x, segundo potências decrescentes de x, é o 5º termo e o valor desse termo é 6.

UNIDADE 4: NÚMEROS COMPLEXOS, POLINÔMIOS, EQUAÇÃO POLINOMIAL, GEOMETRIA PLANA, GEOMETRIA ANALÍTICA

CONTEÚDOS

1. NÚMEROS COMPLEXOS

Forma algébrica:

$z = a + bi$, com a e b reais.

a – parte real de z $\rightarrow a = Re(z)$.

bi – parte imaginária de z.

b – coeficiente da parte imaginária de z $\rightarrow b = Im(z)$.

i – unidade imaginária $\rightarrow i = \sqrt{-1}$.

Igualdade de números complexos:

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$. Tem-se $z = w \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$.

Adição de números complexos:

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$. Tem-se $z + w = (a + c) + (b + d)i$.

Subtração de números complexos:

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$. Tem-se $z - w = (a - c) + (b - d)i$.

Multiplicação de números complexos:

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$. Tem-se $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Número complexo conjugado:

Seja $z = a + bi$. Sendo $\bar{z}$ a notação do seu conjugado tem-se $\bar{z} = a - bi$.

Divisão de números complexos:

Sejam z = a + bi e w = c + di. Tem-se:

$$\frac{z}{w}=\frac{(a+bi)}{(c+di)}\Rightarrow\frac{z}{w}=\frac{(a+bi)}{(c+di)}\cdot\frac{(c-di)}{(c-di)}\Rightarrow\frac{z}{w}=\frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{z}{w}=\frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2}\Rightarrow\frac{z}{w}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Módulo de um número complexo:

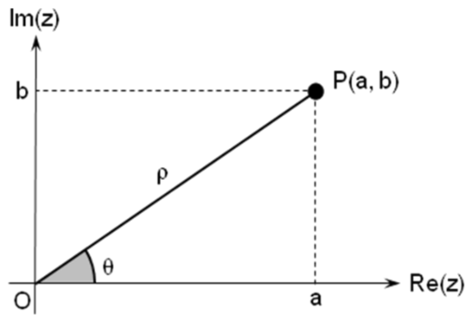
Seja z = a + bi. Sendo o módulo de z representado por ρ, tem-se que $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$.

Argumento de um número complexo:

Seja z = a + bi. Sendo o argumento de z representado por θ, tem-se que cos $\theta = \frac{a}{\rho}$ e sen $\theta = \frac{b}{\rho}$.

Representação gráfica de um número complexo:

Seja z = a + bi. Ele pode ser representado graficamente no plano complexo também denominado plano de Argand-Gauss. O ponto P, que representa graficamente o número complexo z, é dito ***afixo*** de z.



Forma trigonométrica:

Seja z = a + bi. Na forma trigonométrica tem-se z = ρ (cos θ + i·sen θ)

Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica:

Sejam $z_1 = \rho_1$ (cos θ_1 + i·sen θ_1) e $z_2 = \rho_2$ (cos θ_2 + i·sen θ_2). Tem-se:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2\,[\cos(\theta_1+\theta_2) + i \text{ sen } (\theta_1+\theta_2)].$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i \text{ sen } (\theta_1-\theta_2)].$$

Potência de um número complexo na forma trigonométrica:

Seja $z = \rho\,(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$. Têm-se $z^n = \rho^n\,[\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}\,(n\theta)]$.

2. POLINÔMIOS

Monômio:

$$ax^n$$

a: coeficiente (a é uma constante, não nula, qualquer).
x: variável (x assume um valor qualquer).
n: grau do monômio (n é um número natural qualquer).

Polinômio ou função polinomial:

O polinômio é dado por vários monômios ligados pela adição e/ou subtração.

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Grau do polinômio (G_P):

O grau de um polinômio é dado pelo grau do monômio (termo) de maior grau.

Valor numérico de um polinômio:

O valor numérico de um polinômio é dado pelo resultado obtido quando se substitui a variável por uma constante e efetuam-se as operações indicadas. A indicação $P(\alpha)$ representa o valor numérico do polinômio P(x) para x igual a α.

Raiz de um polinômio:

A raiz de um polinômio é valor da variável para o qual o polinômio se anula. Dizemos que *a* é raiz do polinômio P(x) se, e somente se, $P(a) = 0$.

Polinômio identicamente nulo:

Um polinômio é dito identicamente nulo quando apresenta valor numérico zero para qualquer que seja o valor atribuído à variável x.

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ é identicamente nulo com notação: $P(x) \equiv 0$ se, e somente se, $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0$.

Não se define o grau de um polinômio nulo.

Polinômios idênticos:

Dois polinômios são ditos idênticos quando apresentam o mesmo valor para qualquer que seja o valor atribuído à variável x, tanto em um como o outro polinômio.

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ e $Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + a_n$ são idênticos, com notação $P(x) \equiv Q(x)$, se, e somente se, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_{n-1} = b_{n-1}$ e $a_n = b_n$.

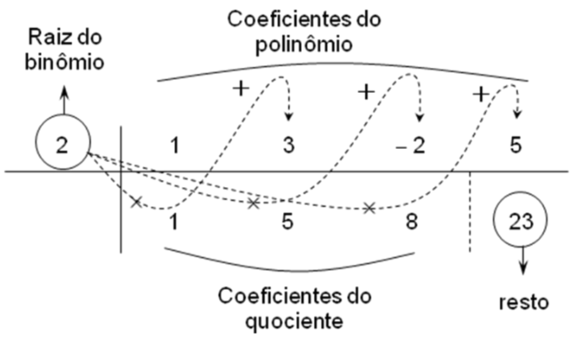
Divisão de polinômios:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$
$$G_P = G_D + G_Q \text{ e } G_R < G_D.$$

Divisão de P(x) por (x – a) – dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Exemplo: Efetuar a divisão do polinômio $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x^2 + 5$ por $D(x) = x - 2$.



$$Q(x) = x^2 + 5x + 8 \text{ e } R(x) = 23.$$

Quando o R(x) for o polinômio nulo, dizemos que a divisão é exata e que P(x) é divisível por D(x).

Teorema do resto:

$$P(x) \div (x - a) \Rightarrow R = P(a).$$

Teorema de D'Alembert:

O polinômio P(x) é divisível pelo binômio (x – a) se, e somente se, P(a) = 0.

Critério geral de divisibilidade:

O polinômio P(x) é divisível por D(x) se, e somente se, as raízes de D(x) forem, também, raízes de P(x).

3. EQUAÇÃO POLINOMIAL

Apresentação:

Equação polinomial ou equação algébrica é toda equação que pode ser apresentada por um polinômio igualado a zero, ou seja, $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$.

Resolver uma equação polinomial é determinar todas as suas raízes, ou seja, todos os valores da variável que anulam o polinômio. Conclui-se a resolução de uma equação polinomial com a apresentação de todas as suas raízes reunidas num conjunto que pode ser chamado de conjunto solução ou conjunto verdade.

Observação:

Multiplicidade de uma raiz é quantidade de vezes que um mesmo número representa raiz de uma equação.

Teorema Fundamental da Álgebra (TFA):

Toda equação polinomial de grau n, $n \in$ ¥ *, admite pelo menos uma raiz, real ou não.

Complemento do TFA:

Uma equação polinomial de grau n, admite exatamente n raízes, considerando-se as reais e as não reais, as iguais e as distintas

Resolução de uma equação polinomial:

Consideremos a equação polinomial de grau n representada pela igualdade P(x) = 0. Seja *a* uma das raízes dessa equação de tal forma que P(a) = 0.

Logo P(x) é divisível por (x – a) e, portanto, P(x) = (x – a)Q(x), sendo Q(x) um polinômio de grau n – 1. Igualando-se Q(x) a zero teremos as outras raízes de P(x).

Assim, estabeleceremos o seguinte roteiro para a resolução de uma equação polinomial.

1º) Fazendo-se uso de algumas outras ferramentas matemáticas determina-se uma das raízes da equação polinomial P(x) = 0;

2º) Com a raiz obtida e, fazendo-se o uso do dispositivo prático de Briot-Ruffini, obtém-se o quociente Q(x), de grau n – 1, que, igualado a zero, determinará as outras raízes.

Relações de Girard:

As raízes de uma equação e os coeficientes dessa equação apresentam entre si algumas relações, chamadas de Relações de Girard. Essas relações podem ser apresentadas para todos os graus de equações polinomiais, como podem ser observadas a seguir.

A.) Equação do 1º grau:

$$a_0x + a_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-a_1}{a_0}$$

B.) Equação do 2º grau:

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-a_1}{a_0} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{a_2}{a_0} \end{cases}$$

C.) Equação do 3º grau:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{-a_1}{a_0} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \dfrac{a_2}{a_0} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \dfrac{-a_3}{a_0} \end{cases}$$

D.) Equação do 4º grau:

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \dfrac{-a_1}{a_0} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = \dfrac{a_2}{a_0} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \dfrac{-a_3}{a_0} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \dfrac{a_4}{a_0} \end{cases}$$

Teorema das raízes complexas conjugadas:

Se o número complexo $z = a + bi$, com $b \neq 0$, é uma das raízes da equação polinomial $P(x) = 0$, de coeficientes reais, então o seu conjugado, de notação $\overline{z} = a - bi$, também será raiz dessa equação.

Assim, pode-se concluir:

1º) A quantidade de raízes complexas não reais, numa equação polinomial de coeficientes reais é dada por um número par.

2º) Numa equação polinomial de coeficientes reais e de grau ímpar, pelo menos uma de suas raízes é real.

3º) Numa equação polinomial de coeficientes reais se o número complexo $z = a + bi$, com $b \neq 0$, apresentar multiplicidade *m*, o seu conjugado, de notação $\overline{z} = a - bi$, será, também, uma raiz de multiplicidade *m*.

<u>Pesquisa de raízes racionais:</u>

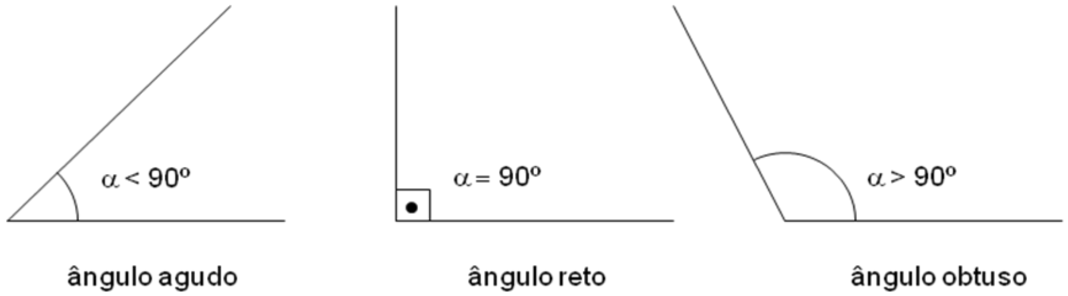
Consideremos a equação $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, de coeficientes inteiros. É possível estabelecermos um conjunto, de poucos elementos, que representam os números racionais que podem ser raízes dessa equação.

Seja p o número que representa o conjunto dos divisores de a_0 e q o número que representa o conjunto dos divisores de a_n. Pois os únicos números racionais "candidatos" à raiz racional da equação dada são representados pela razão p/q.

4. GEOMETRIA PLANA

<u>Ângulo:</u>

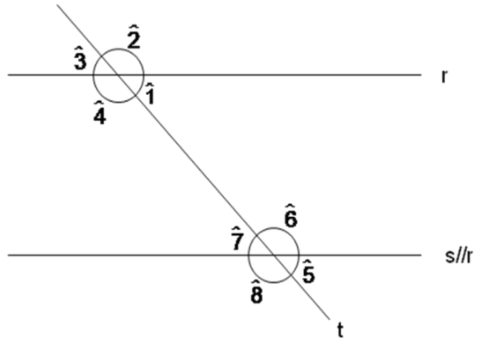
Ângulo é o conjunto de pontos formado por duas semirretas de mesma origem. As semirretas são chamadas de *lados* do ângulo e a origem de *vértice*.



Dois ângulos cuja soma é 90º são chamados ângulos *complementares* e, se a soma for igual a 180º, eles serão chamados de ângulos *suplementares*.

<u>Retas paralelas cortadas por uma reta transversal:</u>

Sejam r e s duas retas paralelas e t uma reta transversal a elas. Assim:



A.) Ângulos correspondentes: $\hat{1}$ e $\hat{5}$; $\hat{2}$ e $\hat{6}$; $\hat{3}$ e $\hat{7}$; $\hat{4}$ e $\hat{8}$. Os ângulos correspondentes têm a mesma medida.

B.) Ângulos opostos pelo vértice: $\hat{1}$ e $\hat{3}$; $\hat{2}$ e $\hat{4}$; $\hat{5}$ e $\hat{7}$; $\hat{6}$ e $\hat{8}$. Os ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.

C.) Ângulos alternos internos: $\hat{1}$ e $\hat{7}$; $\hat{4}$ e $\hat{6}$. Os ângulos alternos internos têm a mesma medida.

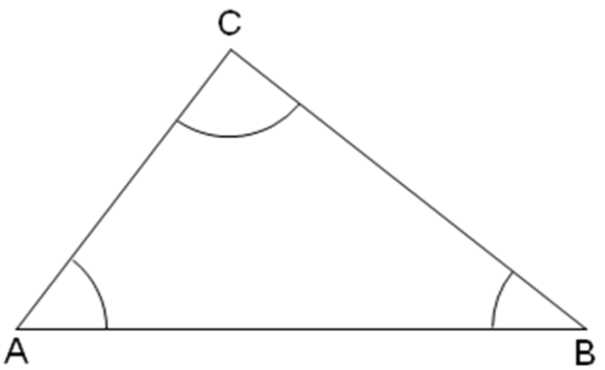
D.) Ângulos alternos externos: $\hat{2}$ e $\hat{8}$; $\hat{3}$ e $\hat{5}$. Os ângulos alternos externos têm a mesma medida.

E.) Ângulos colaterais internos: $\hat{1}$ e $\hat{6}$; $\hat{4}$ e $\hat{7}$. Os ângulos colaterais internos são suplementares, ou seja, a soma de suas medidas é igual a 180º.

F.) Ângulos colaterais externos: $\hat{2}$ e $\hat{5}$; $\hat{3}$ e $\hat{8}$. Os ângulos colaterais externos são suplementares.

<u>Triângulos:</u>

Dados três pontos A, B e C, não colineares, triângulo ABC é a reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.



Os triângulos podem ser classificados de duas maneiras:

1ª) Quanto aos ângulos internos:

- A.) Acutângulo: todos os ângulos internos são agudos.
- B.) Retângulo: um ângulo reto e dois ângulos agudos.
- C.) Obtusângulo: um ângulo obtuso e dois ângulos agudos.

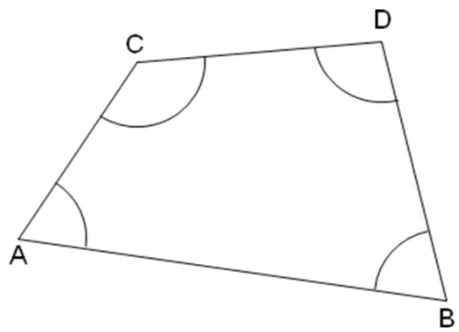
2ª) Quanto aos lados:

- A.) Equilátero: três lados de mesma medida.
- B.) Isósceles: pelo menos dois lados de mesma medida
- C.) Escaleno: três lados de medidas diferentes.

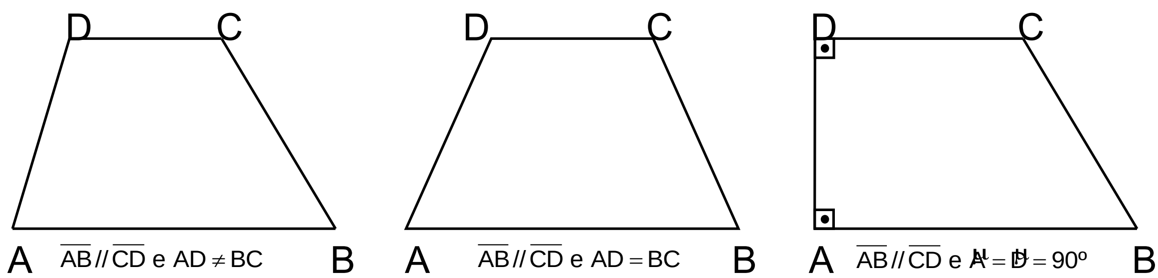
Num triângulo qualquer a soma dos seus ângulos internos é sempre igual a 180º.

Quadriláteros:

Sejam quatro pontos A, B, C e D, distintos, coplanares, sem que existam três colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses segmentos é um quadrilátero.



A.) Trapézio: quadrilátero convexo com dois lados paralelos.

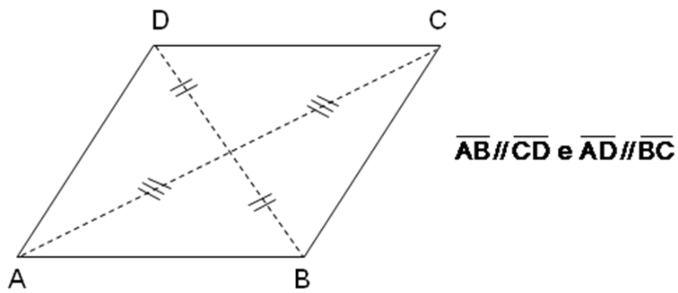


trapézio escaleno

trapézio isósceles

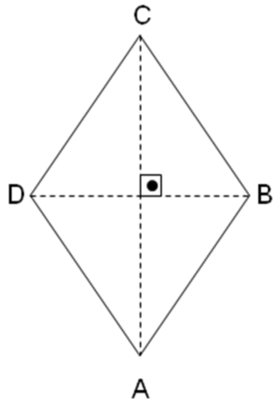
trapézio retângulo

B.) Paralelogramo: quadrilátero convexo com os lados opostos paralelos.



Em todo paralelogramo os ângulos opostos são congruentes.
Em todo paralelogramo as diagonais se interceptam nos respectivos pontos médio.

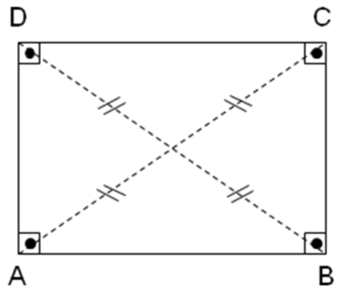
C.) Losango: quadrilátero convexo com os quatro lados congruentes.



$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$

Todo losango é um paralelogramo.
Todo losango tem as diagonais perpendiculares.

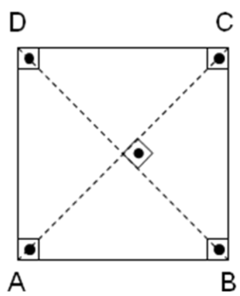
D.) Retângulo: quadrilátero convexo com os quatro ângulos internos congruentes.



$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^o$

Todo retângulo é um paralelogramo.
Todo retângulo tem as diagonais congruentes.

E.) Quadrado: quadrilátero convexo com os quatro ângulos internos congruentes e os quatro lados, também, congruentes.



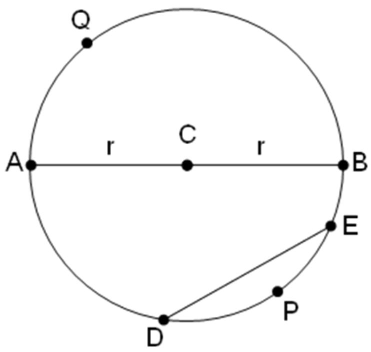
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$

$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^o$

Todo quadrado é um retângulo e um losango e, portanto, admite todas as propriedades desse quadriláteros.

Circunferência:

Circunferência é o conjunto dos pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo denominado *centro* da circunferência. A distância entre os pontos da circunferência e o centro dela é denominado *raio* da circunferência. A circunferência e os pontos internos a ela determinam o *círculo*.



Circunferência de centro C e raio r.

$\overline{AC}$ = raio

$\overline{AB}$ = diâmetro

$\overline{DE}$ = corda

$\overset{\frown}{AQB}$ = **semicircunferência**

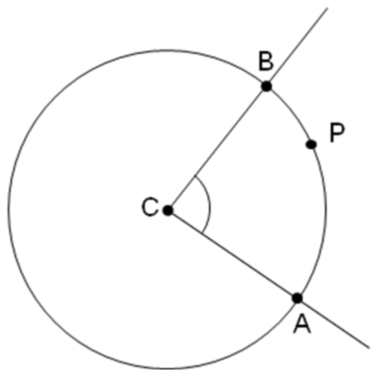
AC = r

AB = 2r

$\overset{\frown}{DPE}$ = **arco**

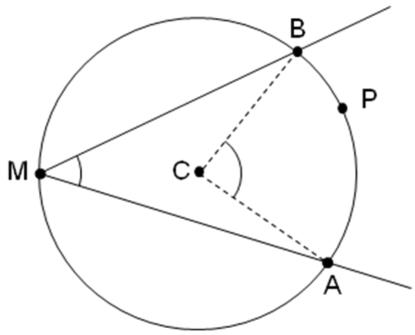
Ângulos na circunferência:

A.) Ângulo central: ângulo com vértice no centro da circunferência. A medida do ângulo central é igual ao arco de circunferência correspondente a ele.



$\overset{\frown}{APB}$ é o arco que corresponde ao ângulo central $A\hat{C}B$.

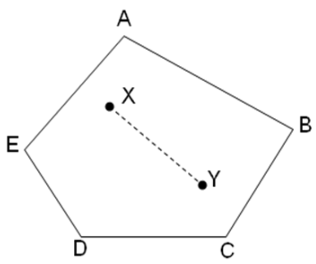
B.) Ângulo inscrito: ângulo que vértice na circunferência e lados secantes a essa circunferência. A medida do ângulo inscrito é igual à metade do ângulo central correspondente a ele.



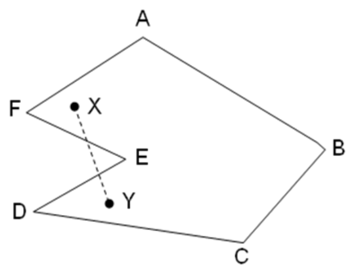
$\overset{\frown}{APB}$ é o arco que corresponde ao ângulo central $A\hat{C}B$ e $A\hat{M}B = \dfrac{A\hat{C}B}{2}$.

Polígonos:

Polígono é uma linha fechada formada por segmentos de retas coplanares que não se cruzam. Um polígono é dito convexo quando quaisquer dois pontos na região limitada pelo polígono definirem um segmento de reta inteiramente contido nessa região. Caso contrário, o polígono será dito não convexo.

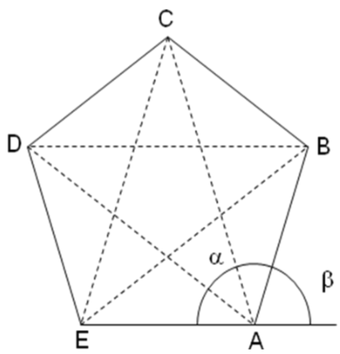


polígono convexo



polígono não convexo

Elementos do polígono:



Lados do polígono: AB, BC, CD, DE e EA.

Diagonais do polígono: AC, AD, BD, BE e CE.

Ângulo interno: α e ângulo externo: β.

Em qualquer polígono convexo, o número de vértices, o número de lados, o número de ângulos internos e o número de ângulos externos é igual.

Nome dos polígonos quanto ao número de lados:

Nº de lados	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Polígonos regulares:

Um polígono é dito regular quando são congruentes (mesma medida) todos os seus lados e todos os seus ângulos internos.

Soma dos ângulos internos de um polígono:

Num polígono convexo de n lados a soma dos seus ângulos internos é dada por $S_i = (n - 2) \cdot 180^o$. Consequentemente, num polígono regular de n lados, a medida de cada ângulo interno é dada por $a_i = \frac{(n-2) \cdot 180^o}{n}$.

Soma dos ângulos externos de um polígono:

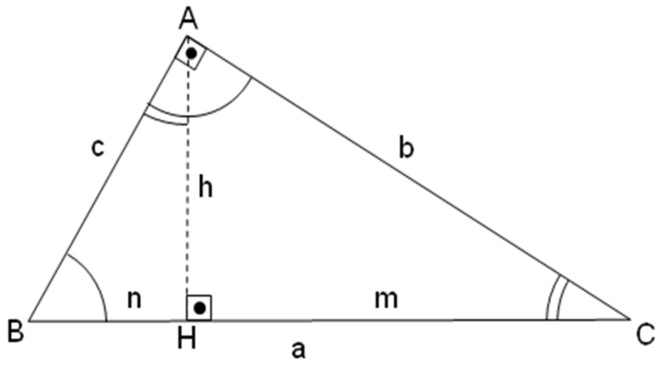
Num polígono convexo de n lados a soma dos seus ângulos externos é dada por $S_e = 360^o$. Consequentemente, num polígono regular de n lados, a medida de cada ângulo externo é dada por $a_e = \frac{360^o}{n}$.

Observação: Num polígono qualquer, em cada vértice, tem-se sempre $a_i + a_e = 180^o$.

Número de diagonais de um polígono:

Num polígono convexo de n lados o número de diagonais é dado por $d = \frac{(n-3) \cdot n}{2}$.

Importante: Triângulo retângulo:



Vértices: A, B e C, sendo A o vértice do ângulo reto.

Lados: a, b e c, sendo *a* a hipotenusa e *b* e *c* os catetos.

Ângulos: $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, sendo $\hat{A}$ o ângulo reto e $\hat{B}$ e $\hat{C}$ os ângulos agudos.

Tem-se, também, *h* – altura relativa à hipotenusa; *n* – projeção do cateto c na hipotenusa e *m* – projeção do cateto b na hipotenusa.

Os triângulos ABC, ABH e ACH são semelhantes e, dessa semelhança, tem-se as seguintes relações:

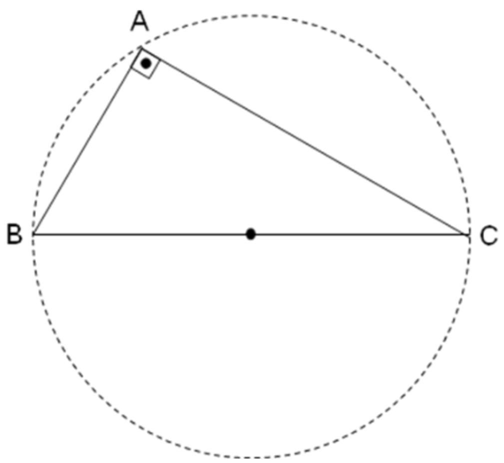
$b^2 = a \cdot m$ $\qquad$ $c^2 = a \cdot n$ $\qquad$ $h^2 = m \cdot n$ $\qquad$ $b \cdot c = a \cdot h$

Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

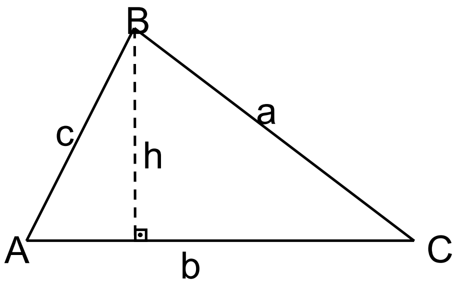
Observação:

Todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é um triângulo retângulo.

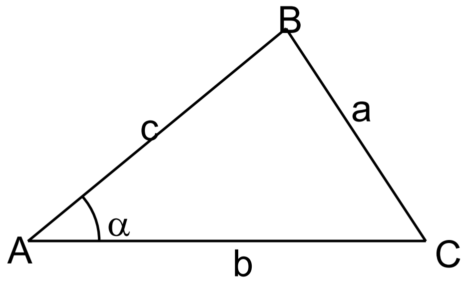


<u>Área da principais figuras planas:</u>

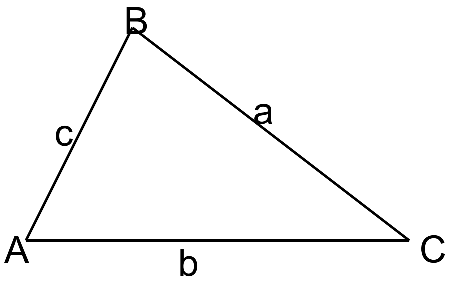
A.) Triângulo:



$$S_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

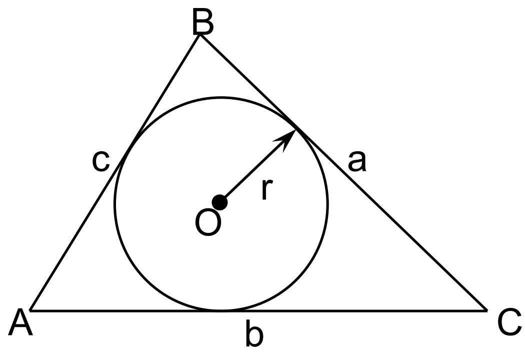


$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

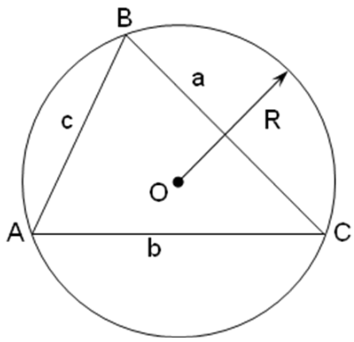


$$S_{ABC} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

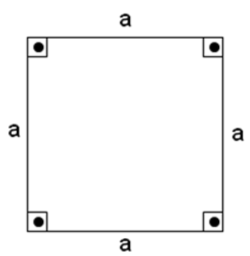


$$S_{ABC} = p \cdot r, \text{ sendo } p = \frac{a+b+c}{2}$$



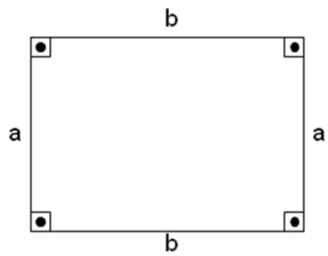
$$\mathbf{S_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}}$$

B.) Quadrado:



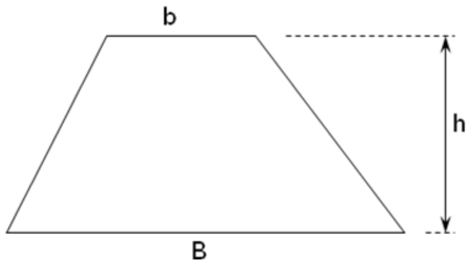
$$S = a^2$$

C.) Retângulo:



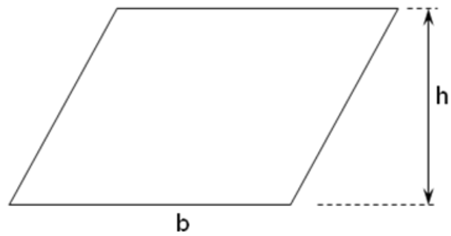
$$S = a \cdot b$$

D.) Trapézio:



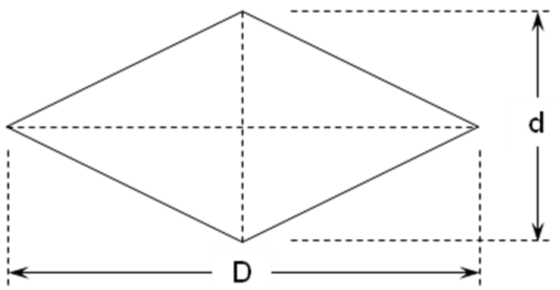
$$S = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

E.) Paralelogramo:



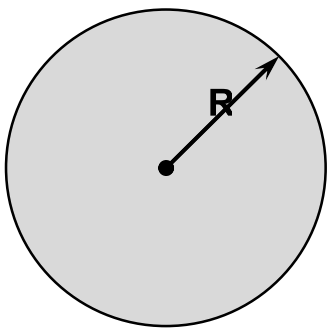
$$S = b\cdot h$$

F.) Losango:



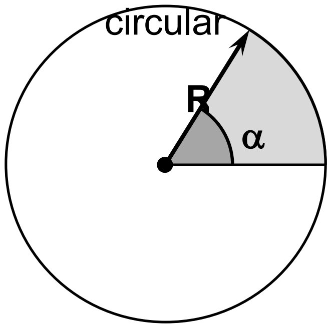
$$S = \frac{D\cdot d}{2}$$

círculo



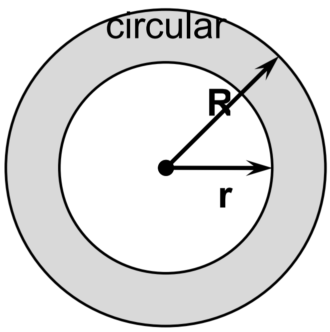
$$S = \pi\cdot R^2$$

setor circular



$$S = \frac{\alpha}{360^o}\cdot\pi\cdot R^2$$

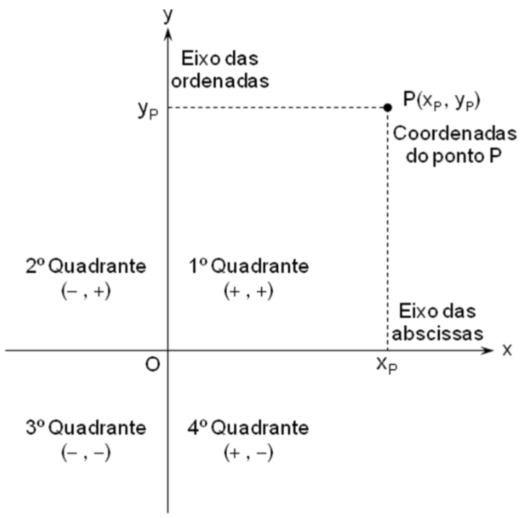
coroa circular



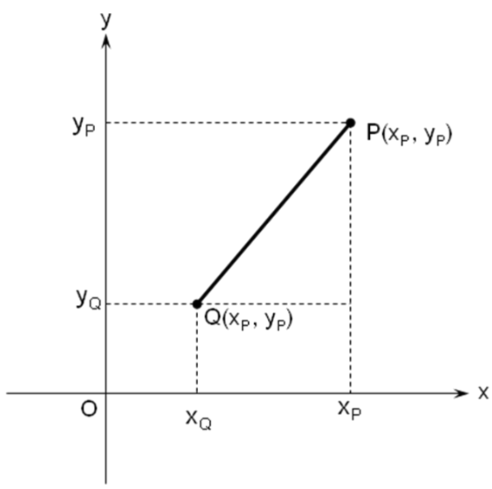
$$S = \pi\cdot(R^2 - r^2)$$

5. GEOMETRIA ANALÍTICA

Plano cartesiano:



Distância entre dois pontos:

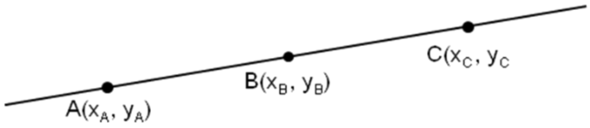


$$d_{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

Ponto médio de um segmento:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ e } y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

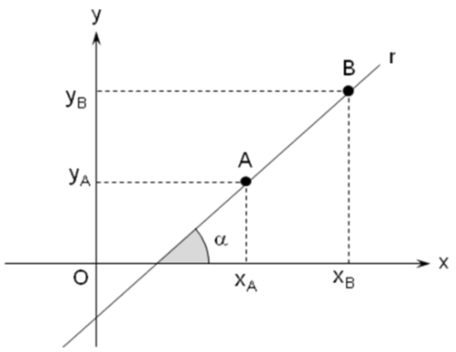
Condição de alinhamento de três pontos;



Se os três pontos A, B e C estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y^C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Inclinação da reta (coeficiente angular):



Seja α a medida do ângulo formado pela reta r com o eixo das abscissas, medido no sentido anti-horário e a partir do eixo x até a reta. Pois esse ângulo representa a inclinação da reta r.

O coeficiente angular é o valor da tangente dessa inclinação. Esse coeficiente angular, representado por m, pode ser calculado das seguintes maneiras:

$$m = \text{tg}\,\alpha \text{ ou } m \; \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ ou ainda } \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

Não se define coeficiente angular para reta vertical, ou seja, reta cuja inclinação é 90º.

Equação da reta:

A.) Ponto A(x_0, y_0) e coeficiente angular m $\rightarrow$ $y - y_0 = m(x - x_0)$ (equação fundamental).

B.) Coeficiente angular m e coeficiente linear n $\rightarrow$ $y = mx + n$ (equação reduzida). O coeficiente linear n é o ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas.

C.) Pontos A(a, 0) e B (0, b) $\rightarrow$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (equação segmentária). A e B são os pontos de intersecção da reta com os eixos das abscissas e ordenadas, respectivamente.

D.) $ax + by + c = 0$ $\rightarrow$ equação geral.

Posição relativa de duas retas coplanares:

Sejam as retas (r): $y = m_r x + n_r$ e (s): $y = m_s x + n_s$. Tem-se:

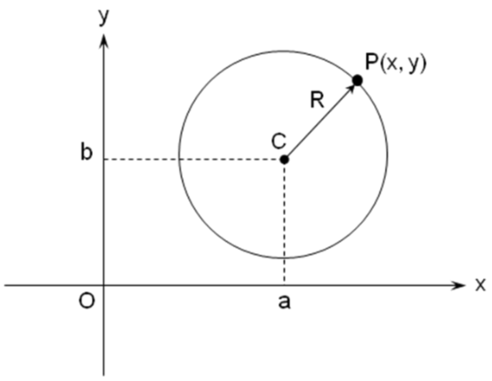
A.) $m_r \neq m_s \rightarrow$ retas concorrentes (um único ponto em comum).

B.) $m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s \rightarrow$ retas paralelas distintas (nenhum ponto em comum).

C.) $m_r = m_s$ e $n_r = n_s \rightarrow$ retas paralelas coincidentes (infinitos pontos em comum).

Equação da circunferência:

Seja uma circunferência de centro C(a, b) e raio R. Seja, também, um ponto P(x, y) pertencente a essa circunferência.



$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \rightarrow$ equação reduzida da circunferência.

Desenvolvendo-se a equação reduzida da circunferência tem-se $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$, que é a equação normal ou geral da circunferência.

Observação:

Condições para que a equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, representa uma circunferência:

1º) $A = B \neq 0$.
2º) $C = 0$.
3º) $D^2 + E^2 - 4AF > 0$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARONI, R. L. S.; BIANCHI, M. I. Z. História da Matemática em livros didáticos. Guarapuava: SBHMat, 2007.

BEZERRA, M.J. e PUTNOKI, J.C. Matemática, 2º grau. São Paulo: Scipione, 1996.

DANTE, L. R. Matemática Contexto & Aplicações. Ensino Médio e Preparação para a Educação Superior. 2ª Edição. São Paulo: Ed. Ática, 2002.

DANTE, L. R. TUDO É MATEMÁTICA: São Paulo: Ática, 2009.

EVES, H. História da Geometria. São Paulo: Atual, 1992.

FREITAS, Ladir Souza de; GARCIA, Airton Alves. Matemática Passo a Passo: com teorias e exercícios de aplicação. São Paulo: Avercamp, 2011.

MURAKAMI, Carlos; LEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar - Vol. 1 - Conjuntos - Funções. 9ª ed. São Paulo: Atual, 2013.

MACHADO, A. S.. Conjuntos Numéricos e Funções - Coleção. Temas e Metas da Matemática. Atual, 1988.

IMENES, L. M. P. e LELLIS, M. Matemática. São Paulo: Scipione, 1997.

GIOVANNI, J.R., BONJORNO, J.R. e GIOVANNI JR, J.R. Matemática Fundamental, 2º grau. São Paulo, FTD, 1994.

SCHWERTL, Simone Leal. Matemática Básica. 3ª ed. São Paulo: Edifurb, 2012.